Cvičení „písemné" (jako 12.3) – odpověď na otázky

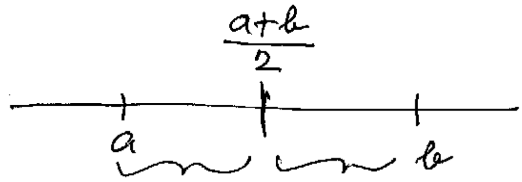
(1.) Podrobnější řešení příkladu (spíše problematice) 3)

Máme ukázat, že platí:

$\lim a_n = a \in R$, $\lim b_n = b \in R$, $a < b \Rightarrow$
existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n < b_n$.

„Myšlenka důkazu": když $a < b$, pak a_n se „hromadí" „blízko" a, a tedy od jistého n_1 jsou blíže než „je polovina vzdálenosti a, b u čísla a, a analogicky, b_n se „hromadí" u b, tedy opět, od jistého okamžiku (označeného indexem n_2) jsou u své limity b blíže, než je ta polovina vzdálenosti „bodů" a, b.

Technické provedení:



$\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$

Z definice limity platí:

(1) k $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ ex. $n_1 \in N$ tak, že pro vš. $n > n_0$ je

$$|a_n - a| < \frac{b-a}{2}, \text{ tedy } a - \frac{b-a}{2} < a_n < a + \frac{b-a}{2}$$

(užijeme: $|a_n - a| < \varepsilon \underset{\varepsilon > 0}{\iff} a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$)

a zde pak „využijeme nerovnost $a_n < a + \frac{b-a}{2} \left(= \frac{a+b}{2} \right)$

a
(2) k $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ ex. $n_2 \in N$ (posloupnost (b_n) „jde" ke své limitě obecně jinou rychlostí, tj. b_n bude od b vzdáleno o naše ε obecně od jiného indexu)

tak, že pro všechna $n > n_0$ platí:

$$|b_n - b| < \frac{b-a}{2}, \text{ tj. } b - \frac{b-a}{2} < b_n < b + \frac{b-a}{2}$$

a my opět využijeme jen jednu nerovnost (která se „hodí"), tj. $b - \frac{b-a}{2} < b_n$, t.j. $\frac{a+b}{2} < b_n$.

A jsme vlastně na „počátečním" obrázku: platí – pro $n > \max(n_1, n_2)$ obě nerovnosti v (1), (2), tedy

$$\underline{a_n < \frac{a+b}{2} < b_n \quad \text{pro } n > n_0 (= \max(n_1, n_2))}$$

což dokazuje naše tvrzení.

(2) Kdekoliv ve cvičení se vyskytne „značka" (T) – znamená to, že je to „taková" limita – tj. jedna z limit, které je dobré „znát".